9.2.9 Nezávislé pokusy

Předpoklady: 9208

Vrátíme se k hodům kostkou.

Př. 1: Obyčejnou kostkou provedeme dva hody. Urči pravděpodobnost, že při prvním hodu kostkou padne liché číslo a při druhém číslo sudé.

Házíme dvakrát, oba hody rozlišujeme $\Rightarrow$ množina všech možných výsledků odpovídá množině uspořádaných dvojic přirozených čísel menších než sedm $\Rightarrow$ 36 možných výsledků.

$$\Omega=\begin{Bmatrix} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{Bmatrix}$$

Hledáme dvojice, které odpovídají našemu požadavku první číslo liché druhé sudé, v prvním, třetím a druhém řádku se nacházejí 3 takové dvojice $\Rightarrow$ celkem 9 možností $\Rightarrow$ pravděpodobnost $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0,25$.

Pedagogická poznámka: Mnozí studenti řeší předchozí příklad spontánně jako dva nezávislé pokusy, snažím se je přesvědčit, že jejich postup je sice rozumný, ale v daném okamžiku ještě ne zcela oprávněný.

Příklad můžeme řešit i jinak. Aby padl požadovaný výsledek, musíme mít štěstí při obou hodech. V prvním je pravděpodobnosti úspěchu $\frac{1}{2}$, v druhém také $\frac{1}{2}$, ale druhý hod má smysl pouze v případě, že v prvním padlo liché číslo $\Rightarrow$ požadovaného výsledků dosáhneme pouze v polovině z poloviny výsledků $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Je možné takto postupovat obecně?

Máme pokus, který můžeme rozdělit na dva dílčí pokusy 1 a 2:

- ω_1 libovolný výsledek prvního dílčího pokusu s pravděpodobností $p(\omega_1)$,
- ω_2 libovolný výsledek druhého dílčího pokusu s pravděpodobností $p(\omega_2)$,
- $(\omega_1;\omega_2)$ libovolný výsledek sdruženého pokusu s pravděpodobností $p(\omega_1,\omega_2)$.

Řekneme, že dílčí pokusy jsou nezávislé, jestliže pro všechny možné výsledky (ω_1,ω_2) platí: $p(\omega_1,\omega_2)=p(\omega_1)\cdot p(\omega_2)$. Jsou-li dílčí pokusy nezávislé a je-li jev *A* určen pouze výsledky prvního dílčího pokusu a jev *B* výsledky druhého dílčího pokusu, jsou jevy *A*, *B* nezávislé.

Dodatek: Podobně můžeme definovat i nezávislost většího počtu dílčích pokusů. Pokud máme pokus, který se skládá z *n* dílčích pokusů, říkáme, že dílčí pokusy jsou nezávislé, jestliže pro každý možný výsledek $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ platí:
$p(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = p(\omega_1) \cdot p(\omega_2) \cdot ... \cdot p(\omega_n)$.

Praktický problém: Přesvědčit se pomocí definice, že dva pokusy jsou nezávislé, nebude ani snadné ani rychlé (těch dvojic, co bychom museli ověřit) $\Rightarrow$ za nezávislé budeme považovat pokusy, které se navzájem neovlivňují.

Př. 2: Rozhodni, zda můžeme za nezávislé považovat následující dvojice pokusů:
a) dva hody kostkou; b) tažení prvních dvou čísel sportky;
c) hod dvěma mincemi;
d) tažení dvojice koulí z osudí, prvně taženou kouli vracíme zpět;
e) tažení dvojice koulí z osudí, prvně taženou kouli zpět nevracíme.

a) dva hody kostkou
Jde o nezávislé pokusy, výsledek prvního hodu, nijak neovlivňuje průběh druhého hodu.

b) tažení prvních dvou čísel sportky;
Nejde o nezávislé pokusy. Pokud jako první vytáhneme například 10, nemůžeme toto číslo táhnout i jako druhé $\Rightarrow$ neplatí $p(\omega_1; \omega_2) = p(\omega_1) \cdot p(\omega_2)$ (po dosazení $0 \neq \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{49}$).

c) hod dvěma mincemi
Jde o nezávislé pokusy, výsledek na první minci nijak neovlivňuje výsledek na druhé.

d) tažení dvojice koulí z osudí, prvně taženou kouli vracíme zpět
Jde o nezávislé pokusy, pro oba tahy táhneme ze stejného osudí.

e) tažení dvojice koulí z osudí, prvně taženou kouli zpět nevracíme.
Nejde o nezávislé pokusy, výsledek prvního pokusu ovlivňuje výsledek druhé, kde nemůžeme vytáhnout stejnou kouli (i kdyby koulí jednoho druhu bylo v osudí více, změnily by se pravděpodobnosti vytažení druhů).

Z předchozího příkladu je vidět, že v minulých hodinách už jsme se nezávislými pokusy zabývali, jen jsme jim tak neříkali.

Př. 3: Obyčejnou kostkou provedeme dva hody. Urči pravděpodobnost, že při prvním hodu kostkou padne menší číslo než při druhém.

Dva přístupy.
Oba hody bereme jako jeden pokus $\Rightarrow$ množina všech možných výsledků odpovídá množině uspořádaných dvojic přirozených čísel menších než sedm $\Rightarrow$ 36 možných výsledků.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{Bmatrix}$$

Výsledky příznivé jevu „při prvním hodu padne menší číslo než při druhém“ se v obrazci nacházejí nad úhlopříčkou $\Rightarrow$ $5+4+3+2+1=15$ příznivých výsledků $\Rightarrow$ pravděpodobnost $P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}=0,41$.

Každý z hodů je na druhém nezávislým pokusem: všechny příznivé průběhy pokusu můžeme modelovat jako průniky dvou jevů z obou pokusů:

- na první kostce padne jedna, na druhé číslo větší než jedna: $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$,
- na první kostce padne dva, na druhé číslo větší než dva: $\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}$,
- na první kostce padne tři, na druhé číslo větší než tři: $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}$,
- na první kostce padne čtyři, na druhé číslo větší než čtyři: $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}$,
- na první kostce padne pět, na druhé číslo šest: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$.

Všechny uvedené možnosti se navzájem vylučují $\Rightarrow$ jejich pravděpodobnosti můžeme sečíst

$\Rightarrow\ P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}=0,41$.

Pedagogická poznámka: V tomto okamžiku si většina žáků ani nevzpomene, že by bylo možné řešit příklad jinak než násobením a brblají, jak je to těžké.

Jak je vidět z předchozího příkladu, ne vždy je rozdělení na nezávislé pokusy výhodou.

Př. 4: V osudí je jedna bílá, tři zelené a čtyři modré koule. Koule jedné barvy jsou navzájem nerozlišitelné. Při jednom tahu vytáhneme jednu kouli, zapíšeme její barvu a poté kouli vrátíme do osudí. Urči pravděpodobnost vytažení koulí jednotlivých barev v jednom tahu. Urči pravděpodobnost, že ve třech tazích po sobě vytáhneme:
a) postupně bílou, zelenou a modrou kouli;
b) v prvních dvou tazích modrou a ve třetím bílou nebo zelenou kouli;
c) právě dvě zelené koule;
d) jednu kouli od každé barvy.

Množina všech možných pokusů má osm prvků (osm koulí, představujeme si, že jsme schopni koule rozlišit, aby bylo vytažení každé z nich stejně pravděpodobné).

Pravděpodobnosti tažení jednotlivých barev: $P(b)=\frac{1}{8}$, $P(z)=\frac{3}{8}$, $P(m)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Jednotlivé tahy jsou nezávislými pokusy (tažené koule se vrací a proto táhneme vždy ze stejného osudí).

a) táhneme postupně bílou, zelenou a modrou kouli

$$P(A)=P(b)\cdot P(z)\cdot P(m)=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{128}=0,023$$

b) táhneme v prvních dvou tazích modrou a ve třetím bílou nebo zelenou kouli

$$P(B)=P(m)\cdot P(m)\cdot P(b\cup z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3+1}{8}=\frac{1}{8}=0,125$$

c) táhneme právě dvě zelené koule

Musíme ve třech hodech dvakrát vytáhnout zelenou kouli a jednou buď bílou nebo modrou.
Pravděpodobnost, že vytáhneme jinou kouli jako poslední: $P(z)\cdot P(z)\cdot P(b\cup m)$, jinou kouli můžeme táhnout třemi způsoby (první, druhou nebo třetí) $\Rightarrow$

$$P(C)=3\cdot P(z)\cdot P(z)\cdot P(b\cup m)=3\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{135}{512}=0,26$$

d) táhneme jednu kouli od každé barvy

Výsledku můžeme dosáhnout například tak, že vytáhneme postupně bílou, zelenou a modrou kouli, takových pořadí je $3!$ (uspořádáváme tři výsledky v libovolném pořadí) $\Rightarrow$

$$P(D)=3!\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{64}=0,14$$

Pedagogická poznámka: Největší problém je s bodem c), kde velká většina nepřijde na nutnost násobení třemi.

Př. 5: Pravděpodobnost, že kontrola odhalí pašovanou drogu při prohlídce zavazadel, je 55%, pravděpodobnost, že drogu odhalí cvičený pes, je 60%. S jakou pravděpodobností se pašerákovi podaří projít přes obě kontroly?

Z hlediska našeho výsledku jde o dva nezávislé pokusy (zajímá nás, kdy ani jedna z kontrol pašeráka nechytí, ne skutečnost, že když ho odhalí první kontrola, k druhé už asi nepůjde).
Pašerák je chycen, pokud ho odhalí alespoň jedna kontrola $\Rightarrow$ hledáme pravděpodobnost $P\left[(K\cup P)'\right]$ $\Rightarrow$ dvě možnosti řešení:

- Sčítání pravděpodobností
  $$P(K\cup P)=P(K)+P(P)-P(K\cap P)=0,55+0,6-0,55\cdot 0,6=0,82$$
  $$P\left[(K\cup P)'\right]=1-P(K\cup P)=1-0,82=0,18$$
- Opačné jevy
  Pašerák projde obě kontroly, když ho neodhalí při prohlídce a zároveň ho nenajde pes.
  $$P\left[(K\cup P)'\right]=P(K')\cdot P(P')=0,45\cdot 0,4=0,18$$

Pašerák má 18% naději, že projde neodhalen přes obě kontroly.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je jen pro nejlepší, předznamenává příští hodinu a není nutné ho nutit všem.

Př. 6: V testu je deset otázek, ke každé jsou přiřazeny čtyři možné odpovědi, z nichž právě jedna je vždy správná. Student látku neumí a své odpovědi zaškrtává náhodně.
S jakou pravděpodobností zaškrtne:
a) právě čtyři správné odpovědi; b) alespoň osm správných odpovědí.

Odpověď na každou otázku bereme jako jeden na ostatních nezávislý pokus $\Rightarrow$ čtyři možné výsledky (čtyři odpovědi), pravděpodobnost zdaru $P(Z)=\frac{1}{4}$, pravděpodobnost nezdaru $P(N)=\frac{3}{4}$.

a) právě čtyři správné odpovědi
Jedna z možností, jak dosáhnout právě čtyř správných odpovědí: první čtyři odpovědi správné, zbývajících šest nesprávných $\Rightarrow$ pravděpodobnost: $\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6$.

Čtyři správné odpovědi můžeme vybrat náhodně z deseti odpovědí $\Rightarrow$ $\binom{10}{4}$ možností každá s pravděpodobností $\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6$.

Celkem: $P(A)=\binom{10}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6=0{,}15$.

b) alespoň osm správných odpovědí
Alespoň osm správných odpovědí, můžeme dosáhnout třemi různými způsoby (u každého určíme pravděpodobnost stejně jako u předchozího bodu):

- právě osm správných odpovědí: $\binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2$,
- právě devět správných odpovědí: $\binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1$,
- právě deset správných odpovědí: $\binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$,

celkem $P(B)=\binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2+\binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=0{,}00042$

V reálné situaci nevíme, zda předmět, který používáme k rozhodnutí, není falešný, přesto existují způsoby, jak vliv „cinknutosti“ omezit.

Př. 7: Provádíme dva hody mincí, jejíž spravedlivost je ovlivněna o malé kladné číslo ε tak, že líc padá s pravděpodobností $0,5+\varepsilon$ a rub s pravděpodobností $0,5-\varepsilon$. Urči pravděpodobnosti jednotlivých výsledků pokusu „dva hody s touto mincí“. Urči pravděpodobnost jevu *A* „v obou hodech padne stejný výsledek“ a jevu *B* „v každém hodu padne jiný výsledek“. Příklad řeš obecně s číslem ε.

Oba hody můžeme považovat za dva nezávislé dílčí pokusy $\Rightarrow$ možné výsledky sdruženého pokusu (l,l), (l,r), (r,l), (r,r).

Pravděpodobnosti výsledků:

- $P(l,l)=(0,5+\varepsilon)(0,5+\varepsilon)=0,25+2\varepsilon+\varepsilon^2$,
- $P(l,r)=(0,5+\varepsilon)(0,5-\varepsilon)=0,25-\varepsilon^2$,
- $P(r,l)=(0,5-\varepsilon)(0,5+\varepsilon)=0,25-\varepsilon^2$,
- $P(r,r)=(0,5-\varepsilon)(0,5-\varepsilon)=0,25-2\varepsilon+\varepsilon^2$.

Pravděpodobnosti jevů:

$P(A)=P(l,l)+P(r,r)=0,25+2\varepsilon+\varepsilon^2+0,25-2\varepsilon+\varepsilon^2=0,5+2\varepsilon^2$,

$P(B)=P(l,r)+P(r,l)=0,25-\varepsilon^2+0,25-\varepsilon^2=0,5-2\varepsilon^2$.

K čemu jsou dobré předchozí výpočty?
Pokud bychom dosadili do předchozích výsledků $\varepsilon=0,1$ (mince je cinknutá, ale ne tak, aby se to projevilo zcela jasně na první pohled):

$P(l)=0,5+\varepsilon=0,5+0,1=0,6$

$P(r)=0,5-\varepsilon=0,5-0,1=0,4$

$P(A)=0,5+2\varepsilon^2=0,5+2\cdot 0,1^2=0,52$

$P(B)=0,5-2\varepsilon^2=0,5-2\cdot 0,1^2=0,48$

Ačkoliv jsou pravděpodobnosti hození líce a rubu značně rozdílné (0,2 tedy 20%), pravděpodobnosti jevů *A* a *B* jsou si daleko bližší (rozdíl jen $0,04$ tedy 4%).
V případě, kdy si nejsme jisti spravedlivostí losovacího zařízení, se můžeme pokusit nahradit jeden pokus složeným pokusem s příznivějším rozložením pravděpodobností.

Shrnutí: Pokud můžeme pokus rozdělit na více nezávislých dílčích pokusů, můžeme problém rozdělit na menší části.